CONCOURS COMMUN D'ADMISSION AUX ÉCOLES SUPÉRIEURES DES TRAVAUX PUBLICS DU BÂTIMENT DE MÉCANIQUE-ÉLECTRICITÉ DE TOPOGRAPHIE

SESSION 1994

DEUXIÈME INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES

Durée: 4 heures

Nota: les cinq sujets sont indépendants et peuvent être traités, à la rigueur, dans un ordre quelconque, sous réserve d'indiquer très distinctement *leur numéro. Leur 5ème question est, en général, la plus difficile. Dans la rédaction des copies, les candidats sont priés de bien vouloir* encadrer *chacun des résultats correspondants aux éléments* encadrés *dans les énoncés.*

SUJET 1

Pour tout entier $n \geq 0$, on définit $I_n = \int_0^1 \frac{(1+t)^n}{1+t^2}\,dt$. (1) Calculer I_0 et I_1.

(2) Établir l'existence d'un polynôme P_n et de réels a_n et b_n tels que $\frac{(1+t)^n}{1+t^2} = P_n(t) + \frac{a_n + b_n t}{1+t^2}$.

Calculer a_n et b_n au moyen des suites $2^{n/2}$, $\cos(n\frac{\pi}{4})$ et $\sin(n\frac{\pi}{4})$.

(3) Montrer que I_n peut s'écrire sous la forme $p_n + q_n . \ln 2 + r_n . \pi$, où (p_n), (q_n), (r_n) sont 3 suites de *rationnels*. Pour *quelles valeurs* de l'entier n a-t-on $q_n = 0$?

(4) Calculer $I_{n+2} - 2I_{n+1} + 2I_n$, $q_{n+2} - 2q_{n+1} + 2q_n$, $r_{n+2} - 2r_{n+1} + 2r_n$ et établir une *récurrence* entre les p_n. Que vaut p_5 ?. [On mettra le résultat sous la forme d'une fraction *irréductible*.]

(5) Trouver des constantes A et B telles que $I_n = \frac{2^n}{n}(A + \frac{B}{n} + o(\frac{1}{n}))$. [On peut intégrer par parties...]

SUJET 3

On pose $u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$ pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x > -1$, et $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$.

(1) Montrer que la série $\sum u_n(x)$ converge si $x > -1$. Dans ce cas, on notera $f(x)$ sa somme.

(2) Établir que $f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt$ si $x > -1$. [On peut partir de $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \int_0^1 t^{x+k-1}\,dt$.]

(3) Calculer $f(\frac{1}{3})$ sous la forme $u + v . \ln 2 + w . \frac{\pi}{\sqrt{3}}$, où u, v, w sont des entiers à préciser.

(4) Montrer l'existence de la dérivée $f'(0)$ de $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ et calculer sa valeur. [On donne $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.]

(5) Prouver que $f(x)$ est développable en série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ pour $|x| < \delta$, à préciser. [On montrera que $f(x)$ vaut $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xu}}{e^u+1}\,du$, et on utilisera $e^t = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} + \frac{t^n}{n!} e^{\theta t}$, où $0 < \theta < 1$, formule dans laquelle on fera $t = -xu$.]

2ème interrogation 2/2

SUJET 2

On pose ici $L_k(x) = \ell n(\ell n(\ldots(\ell n(x))\ldots))$, où le symbole ℓn du logarithme népérien figure k fois. Ainsi $L_0(x) = x$, $L_1(x) = \ell n\, x$, $L_2(x) = \ell n(\ell n\, x)$, $L_3(x) = \ell n(\ell n(\ell n x))$, ...

(1) Étudier la *nature* de la série $\sum a_n$, où $a_n = L_1(n)^{-L_1(n)}$.

(2) Étudier la *nature* de la série $\sum b_n$, où $b_n = L_2(n)^{-L_2(n)}$.

(3) Préciser l'ensemble J des entiers $j \geq 0$ pour lesquels converge la série $\sum c_n(j)$, où $c_n(j) = L_j(n)^{-L_1(n)}$.

(4) Préciser l'ensemble K des entiers $k \geq 1$ pour lesquels converge la série $\sum d_n(k)$, où $d_n(k) = L_1(n)^{-L_k(n)}$.

(5) Soit N le plus petit entier tel que $c_n(2) \leq \frac{1}{n^2}$ si $n \geq N$. Calculer le *nombre de chiffres de N* en base 10.

SUJET 4

On pose $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$ pour tout réel $x \neq 1$, $f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$, et $E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

(1) Représenter la courbe d'équation $y = f(x)$, en précisant les branches infinies et la concavité.

(2) Montrer que $f^{(n)}(x) = \frac{e^x}{(1-x)^{n+1}} P_n(x)$, où P_n est un polynôme à exprimer en fonction de P_{n-1} et P'_{n-1}.

(3) Préciser le coefficient a_n de x^n dans ce polynôme. Calculer $P_n(1)$.

(4) En dérivant n fois $(1-x)f(x) = e^x$, trouver une relation (à encadrer) entre P_n et E_n.

(5) Vérifier que l'expression $F_n(x) = e^x E_n(-x)$ vaut $1 + \int_0^x e^t \frac{(-t)^n}{n!}\, dt$. En déduire le nombre r_n de solutions *réelles* de l'équation $P_n(x) = 0$. [Distinguer deux cas: n pair, $n=2k$, ou n impair, $n=2k+1$.]

SUJET 5

On appelle ($\mathscr{E}$) l'équation différentielle $|x|y' + y = \cos x$.

(1) Pour $x > 0$, expliciter la *solution générale* $\varphi_\lambda(x)$ de ($\mathscr{E}$), où λ désigne une constante arbitraire.

(2) Démontrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{x} \frac{\cos t}{t^2}\, dt$ converge pour tout $x < 0$. On note $G(x)$ sa valeur.
Pour $x < 0$, écrire, à l'aide de $G(x)$ et d'une constante arbitraire μ, la solution générale $\psi_\mu(x)$ de ($\mathscr{E}$).

(3) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \varphi_\lambda(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} \psi_\mu(x)$, si elles existent, *finies* ou *non*.

(4) Établir que la courbe $y = \psi_\mu(x)$ admet une asymptote dont on fournira l' équation.

(5) Préciser λ et μ afin qu'il existe une certaine fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$ et solution de ($\mathscr{E}$), telle que $f(x) = \varphi_\lambda(x)$ si $x > 0$, et $f(x) = \psi_\mu(x)$ si $x < 0$. [La fonction f "raccorde" $\varphi_\lambda(x)$ et $\psi_\mu(x)$.] On donne $\int_{-\infty}^{0} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$.